En busca de la Relatividad General (I)

J. Ramón Linares
Departamento de Matemáticas. I.E.S. Antonio de Mendoza

A Nieves, Manolo y Ramiro, los impulsos iniciales

Prefacio

Este pequeño trabajo, primero de tres que he planeado, comenta ciertas dificultades típicas en el aprendizaje de la Relatividad Especial. Trataré de identificar algunos prejuicios de notación matemática que lastran el desarrollo posterior de conceptos geométricos superiores, necesarios para ascender hacia la teoría de la Relatividad General, joya del pensamiento de Einstein.

Pero esta tríada de pequeños artículos pretende varios objetivos más, alguno de ellos francamente inmodesto. Parece apropiado que un profesor del Centro colabore en la revista del Instituto. Pero escribir sobre Einstein y su teoría a estas alturas resulta algo peligroso, pues hay innumerables trabajos divulgativos redactados por probados especialistas en el tema, por no hablar del nivel investigador, ante los cuales no procede que un mero aficionado como yo se compare.

Sin embargo, la teoría de la Relatividad General de Einstein, junto a su inseparable y fiel compañera matemática, la Geometría Diferencial, que descubrí en mi época de estudiante de Ciencias Físicas, se me reveló como un súbito amor de juventud, que ha continuado a través de los años. Ella me ha enriquecido y su encanto ha ido en aumento como el *bouquet* de todo buen vino. Creo que le debo al menos el público homenaje de estos pequeños artículos.

Otro objetivo, casi tan osado como el anterior, consiste en interesar a personas con nivel de Segundo Ciclo de Secundaria y, por supuesto, Bachillerato, para que se atrevan a probar un sorbo de este exquisito vino que espero saber escanciar con el debido esmero. Desgraciadamente los tiempos resultan adversos, pues a nuestros actuales estudiantes les han publicitado otras bebidas, más parecidas a la gaseosa, y es probable que muchos rechacen el desacostumbrado sabor del esfuerzo al afrontar una auténtica argumentación físico-matemática, por muy simplificada que se les presente.

Por eso causa tanta pena la interminable disputa sobre mejora de la enseñanza, que no cesa de dar vueltas sobre *continentes* y *pacientes,* obviando por un lado los *contenidos* y evolucionando por otro desde una autocrítica, necesaria para todos, a diagnóstico, necesario sólo para órganos *inferiores,* los posibles *enfermos.* Por lo visto, los órganos superiores están tan sanos que no necesitan diagnóstico, especialmente los cargos políticos... Lo que unos y otros llaman calidad olvida unas imprescindibles y saludables condiciones de sombra, sosiego y frescura en las bodegas, para luego extrañarse de que en lugar de crianzas y reservas proliferen los mostos. Mientras, los despachos se anegan de burocracia y los publicistas siguen buscando la botella mágica (pero sin genio-disidente dentro) que consiga *mejorar los resultados* de... ventas. En fin, parafraseando al viejo y pícaro Feynman, ya estoy algo mayor y *debo* estar equivocado. Seguro que los *expertos* llevan razón...

Bien, para ser políticamente correcto debo motivar el artículo con alguna experiencia de la vida real. Evocando mis años mozos, cuando era joven y guapo y no había tanta reja cercando los Institutos, recuerdo bien la discusión entre un grupo de amigos que cursaban entonces 2º de BUP, por la tremenda noticia aparecida en la "tele": con la teoría de la Relatividad especial quedaba superada y vetusta la Geometría de los griegos, pues ¡se invalidaba nada menos que el Teorema de Pitágoras!.

Para aclararnos, fuimos a preguntar a nuestro profesor de Física, que se hartó de reír y en lugar de darnos la respuesta mascada, me pasó un ejemplar de un libro de Física de nivel universitario para que buscásemos la respuesta por nosotros mismos...

DUELO DE TITANES

Déjate llevar ahora, osado lector, hacia cimas Olímpicas rodeadas de nubes silenciosas, donde habita una Paz que aquí no se conoce, junto a los Lagos Eternos que se nutren solamente de las aguas más puras del Cielo.... allí, más allá del Tiempo, entre otros sabios y benévolos amigos de lo humano, moran los augustos espíritus del venerable Pitágoras y del incomparable Einstein, que así conversan:

PITÁGORAS: "Me entristece bastante, amigo Einstein, el último rumor que corre entre los mortales. Pensaba que mi Teorema, junto a otros tesoros del mundo ideal de la Geometría pura, nunca caería en el olvido, viéndose inválido a mano de tus descubrimientos".

EINSTEIN: "Sagrada fue para mí la Geometría, desde que en mi primera juventud leí el pequeño librito de Euclides, que después me acompañó toda la vida. Buen Pitágoras, no hagas caso de rumores que ruedan desbocados por el inframundo televisivo, construido por indignos mortales que ansían fagocitar nuestro mundo Antiguo y Azul. Yo te mostraré cuán errados andan.

Acompáñame, si te place, a la oscura ribera del Leteo, donde la terrible Medusa, cuya mirada petrifica a quien la observa, ha resurgido una vez más de los inmundos restos del odio y del engaño de los mortales, y trata de cruzar el río de las sombras para traer impía guerra a los campos inmortales del Elíseo. Mas ella será burlada y destruida por el valiente Perseo, gracias a la fuerza de su brazo y al bruñido reverso de su escudo, causas materiales de su derrota.

Sin embargo, otras causas más ocultas y sutiles garantizan el triunfo de Perseo. Demostraré que tu Teorema, noble Pitágoras, es asiento de mi teoría especial de la Relatividad, por la que se rigen los rayos de luz que han de llegar al terso escudo de Perseo, claro y límpido espejo. Felizmente unidos tu Teorema y mi Teoría, serán sellos del Destino que concede a Perseo el poder de *adelantarse* siempre a los ataques de Medusa".

PITÁGORAS: "Ardo en deseos de conocer el secreto. Así quedarán vencidos a un tiempo la cruel Medusa y los insanos rumores. Descendamos....".

***

"...hemos alcanzado las orillas del Leteo. Mira, en la parte más estrecha se encuentra Medusa al acecho. Gracias a los dioses, está de espaldas a nosotros, su mirada fija en el río... Ojalá bebiese de las crepusculares aguas, olvidando su horrible propósito y la angustia de su existir. Oh, entre las lejanas nieblas se vislumbra una sombra confusa. ¿Qué flota sobre el Leteo, arrastrado por la espumosa corriente?".

EINSTEIN: "Se trata de una barca, donde erguido se halla el valiente Perseo. Viaja de espaldas a esta misma ribera donde acecha Medusa, y viene elevando su escudo de forma que la tenebrosa orilla quedaría reflejada si la oscuridad fuese menos densa. A sus pies tiene preparado un cuenco de metal con brasas que se inflamarán con el fétido aliento de Medusa cuando la barca llegue al punto exacto donde ella espera al acecho.

Medusa no podrá ver directamente a Perseo pues éste se confunde con las sombras, embozado en un gran manto negro. Ambos tendrán que verse a través del espejo. En el instante en que las brasas del cuenco se inflamen, un potente rayo ígneo iluminará la escena.

Aunque el espejo proteja a Perseo de la mirada directa de Medusa, ¿quién podrá descargar el primer golpe, de seguro mortal?. ¿Quién de los dos verá primero a su oponente?".

PITÁGORAS: "¿No se verán ambos en el mismo instante terrible?"

EINSTEIN: "Eso ocurriría si ambos contendiesen en tierra ante un espejo fijo en el suelo. La clave es que Medusa mira a Perseo a través de un espejo que *para ella* está en movimiento, mientras que Perseo mira a Medusa a través de un espejo que *para él* está en reposo. ..... Salgamos ahora de este valle sombrío para volver a las cimas gloriosas donde terminaré de contarte mi idea....

***

A fin de resolver los enigmas, mi punto de partida consistió en proclamar que las auténticas leyes físicas deben ser las mismas independientemente del punto de vista de cada observador (Principio de objetividad de las leyes físicas).

Pero este bello principio filosófico tiene que materializarse en lenguaje matemático como principio físico aplicable a casos prácticos. Hay cierta ambigüedad en la expresión "las mismas". Por ello, lo transformé en:

Principio (provisional) de Relatividad: las auténticas leyes físicas han de mantener "la misma forma matemática" en la referencia de cualquier observador, independientemente de su movimiento.

Así, conocida la forma matemática de una ley física desde el punto de vista de un observador, se podría aplicar también válidamente a todos los demás. Pero surge un curioso inconveniente: la forma matemática de las leyes de la dinámica de Newton se ve comprometida por la aparición de *pseudofuerzas* que no corresponden a campos físicos cuando el observador mismo está sometido a desplazamientos distintos de la traslación uniforme y rectilínea.

Como en esa época no había estudiado aún Geometría Diferencial, no sabía tratar desplazamientos genéricos, y tuve que limitar la aplicación práctica de mi principio de relatividad a los casos más sencillos, muy a mi pesar.

La segunda Ley de Newton (resultante de fuerzas = masa por aceleración) es invariante bajo desplazamientos rectilíneos y uniformes.

Esto significa que si un observador está (supuestamente) libre de pseudofuerzas, cualquier otro relacionado con él mediante desplazamientos rectilíneos y uniformes también está libre de pseudofuerzas (en este caso especial dichos observadores son llamados "inerciales").

Esta simetría especial de la dinámica de Newton abre la posibilidad de aplicar correctamente mi principio de relatividad si nos restringimos a transferir leyes matemáticas entre observadores "inerciales". Por eso esta fase de la teoría se llamó relatividad especial o relatividad restringida.

Principio restringido de Relatividad: las auténticas leyes físicas deben mantener la misma forma matemática en la referencia de cualquier observador "inercial", independientemente de su movimiento.

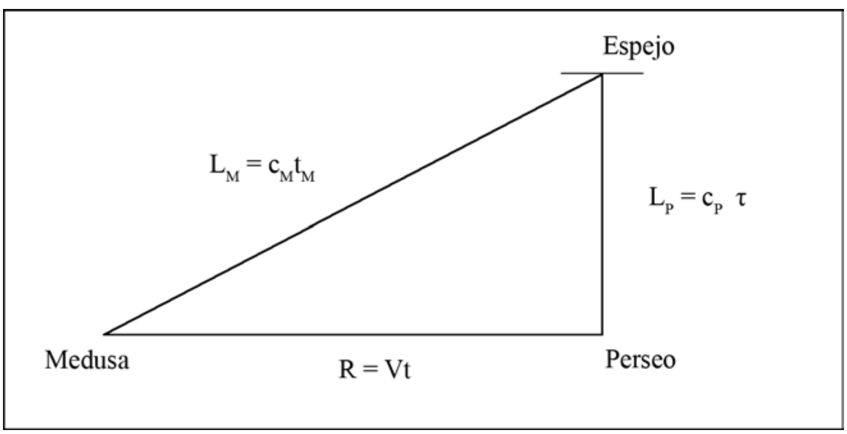
Veamos el caso que nos ocupa:

Ley física del movimiento rectilíneo y uniforme
Distancia recorrida = (velocidad constante por tiempo de viaje)
Válida entre observadores "inerciales" (libres de pseudofuerzas)

Analiza despacio el siguiente esquema, donde llamaremos C_M a la velocidad del rayo de luz y t_M al tiempo que tarda el rayo de luz en llegar al espejo, ambos desde el punto de vista de Medusa. Paralelamente, llamaremos C_P a la velocidad del rayo de luz y τ_P al tiempo que tarda el rayo de luz en llegar al espejo, ambos desde el punto de vista de Perseo.

Los rayos de luz se propagan en línea recta a velocidad constante.
Suponiendo que Medusa es inercial, Perseo también lo es,
y la propagación de la luz toma la misma forma para los dos observadores:

$$L_M = C_M\, t_M \text{ y } L_P = C_P\, \tau_P$$



Por otra parte, ambos, Perseo y el escudo-espejo, se acercan a Medusa a la misma velocidad *constante* V de la intrépida corriente que arrastra la barca.

Mientras la luz llega al espejo, Perseo ha avanzado arrastrado por la corriente del Leteo una longitud $R = V\, t_M$, medida desde el punto de vista de Medusa. En cambio, desde su propio punto de vista Perseo no avanza porque se percibe a sí mismo en reposo".

PITÁGORAS: "Comprendo ya tu teoría. Puedes aplicar mi Teorema al triángulo rectángulo cuya base es la distancia que el río arrastra a Perseo (vista por Medusa), mientras que las distancias recorridas por el rayo de luz desde los respectivos puntos de vista de Medusa y Perseo juegan los roles de hipotenusa y cateto".

Teorema de Pitágoras $(L_M)^2 = (L_P)^2 + (R)^2$

¡Eureka!

$$(C_M\, t_M)^2 = (C_P\, \tau_P)^2 + (v\, t_M)^2$$

EINSTEIN: "¡Exacto!. Vamos ahora a despejar el tiempo que tarda en llegar al espejo la luz desde el punto de vista de Medusa en función del tiempo que tarda la luz desde el punto de vista de Perseo, al que llamaremos tiempo propio, porque se refiere a un fenómeno físico entre objetos en reposo relativo.

$$(C_M\, t_M)^2 - (v\, t_M)^2 = (C_P\, \tau_P)^2$$
$$(C_M)^2 (t_M)^2 - v^2 (t_M)^2 = (C_P)^2 (\tau_P)^2$$
$$(t_M)^2 (C_M^2 - v^2) = C_P^2 (\tau_P)^2$$

Para culminar, introducimos una auténtica **ley física**: la velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente, sólo depende del medio. Aplicando a este enunciado el principio restringido de relatividad, podemos decir que la velocidad de la luz en el vacío es un **invariante** para observadores "inerciales" (libres de pseudofuerzas), es decir, perciben la ***misma*** **constante**:

$$C_M = C_P = C$$
$$(t_M)^2 (C^2 - v^2) = C^2 (\tau_P)^2$$

Dividiendo toda la ecuación entre el cuadrado de la velocidad de la luz,

llegamos a: $(t_M)^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = (\tau_P)^2$

tomando raíces cuadradas positivas: $t_M \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \tau_P$

despejando el tiempo de viaje del rayo visto por Medusa y quitando sub-índices

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

que se reescribe $t = \gamma(v)\, \tau$, llamando $\gamma(v)$ al inverso de $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$

La desigualdad $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} < 1$ implica que su inverso γ es mayor que 1.

Es decir, cada viaje de los rayos luminosos dura más tiempo visto por Medusa que por Perseo".

PITÁGORAS: "Y las imágenes en el espejo pasan más lentas para Medusa, llegan atrasadas. Por tanto, Perseo siempre se adelanta por ley de la Naturaleza, y su triunfo es Destino tan inmutable como ella. ¡Gloria a vosotros, dioses!"

EINSTEIN: "Y gloria a tu Teorema, en el que se basa mi cálculo. Mi teoría no lo invalida, todo lo contrario. Los rumores eran falaces, como suele suceder".

PITÁGORAS: "De acuerdo. Estoy satisfecho. Pero ¿qué provocó la confusión exactamente? ...."

EINSTEIN: "Si aplicamos la hipótesis de un tiempo absoluto a tu Teorema, que en principio versa sobre longitudes, se transfiere tal cual a otras magnitudes como las velocidades:

$$t_M = \tau_P = t$$
$$(C_M\, t)^2 = (C_P\, t)^2 + (v\, t)^2$$
$$(C_M)^2 = (C_P)^2 + (v)^2$$

La confusión, a veces inducida por los mismos profesores de geometría, entre vectores velocidad ("flechas tangentes") y vectores posición ("puntos") ha hecho pensar que el auténtico Teorema de Pitágoras en el "espacio de posiciones" implica siempre este otro Teorema de Pitágoras "gemelo" en el "espacio de velocidades". Tal implicación se rompe si el invariante es la velocidad de la luz, en vez del tiempo absoluto.

Dicho en términos matemáticos, en relatividad especial la 1+3-métrica no euclídea del espacio-tiempo convive con un sinfín de 3-métricas euclídeas en las hojas espaciales, una por cada observador. Cada observador tiene su propio Teorema de Pitágoras personalizado....."

PITÁGORAS: "Ya lo entiendo. Todo observador es libre para realizar sus propias medidas geométricas independientemente del resto. Las medidas de distintos observadores sólo han de coincidir en los invariantes geométricos, con los que la Naturaleza escribe sus leyes. ¡Por Zeus! Al final, se me calumnia en la tele esa sólo para evitar afirmar la libertad de puntos de vista también en Geometría.... ¡Qué vulgaridad!"

EINSTEIN: "Conmigo hicieron lo mismo, en la Alemania de la época. Pero ese problema lo tiene que resolver cada generación por sí misma, en su tiempo propio. Nosotros, buen amigo, al cruzar las aguas del Leteo decidimos dejar muy atrás los dilemas del Tiempo y del Poseer. Es otra dimensión..."

Nos despedimos por ahora de nuestros Héroes para bucear en un mundo más prosaico

Desarrollo histórico de un debate *hystérico*

Pues no, no es broma. Y sí, lo menos que se puede decir cuando la gente termina en la cárcel, como Galileo, por sostener puntos de vista distintos de los comunes, es que se ha llegado a un punto de histeria en el debate. Es más, quizá haya sido el debate científico más largo y más histriónico de la Historia. Se trata de la búsqueda de una referencia para poder describir el movimiento "absoluto".

En la vida cotidiana, si tomo mi propio punto de vista como referencia ocurre que uno siempre está en reposo respecto a sí mismo y los demás, a veces, en movimiento. Pero otro observador cualquiera podría proclamar la misma idea, viéndose a sí mismo en reposo. ¿Quién lleva razón?

Las respuestas más famosas han sido las siguientes:

A) Suposición de una referencia privilegiada en reposo "absoluto".

Sistemas astronómicos de distintas culturas tomaron la Tierra como centro del Universo, completamente quieto. Esta idea pasó a formar parte de la interpretación habitual de los fenómenos celestes, y se integró en el fondo cultural, filosófico y religioso. Así vino a suceder en Occidente que negar la inmovilidad de la Tierra suponía poner en cuestión a la vez el sistema astronómico de Ptolomeo, algunos aspectos de la filosofía de Aristóteles, y cierta interpretación literal de las Sagradas Escrituras.

Siguiendo al antiguo astrónomo griego Aristarco de Samos, Nicolás Copérnico propuso reconocer la situación del Sol como punto central, en torno al cual gira la Tierra como otro planeta más (sistema heliocéntrico). Pero fue Galileo Galilei quién osó realizar gran difusión de esta idea, asumiendo las consecuencias culturales mencionadas, hasta llegar a público enfrentamiento con reputadas autoridades de la época que, al sentirse cuestionadas, olvidaron el deseado reposo teórico en pro de la histeria práctica.

B) El reposo "absoluto" es indetectable por observación de estados de movimiento. El reposo (relativo) es (cinemáticamente) indistinguible del movimiento rectilíneo y uniforme.

Mérito también de Galileo fue percatarse de esta solución, escribiendo en su *"Diálogo respecto a los dos sistemas cosmogónicos principales, Ptolomeico y Copernicano"* (citado en [2]):

"Encerraos con algún amigo en la mayor habitación posible bajo la cubierta de un gran navío y procurad que haya allí moscas, mariposas, y bichos voladores semejantes; procurad también un recipiente de agua de gran tamaño con pececillos dentro; suspended también de lo alto un balde del que gota a gota vaya cayendo agua en un frasco de boca angosta situado debajo, y hallándose quieto el navío, observad diligentemente cómo se realizan los movimientos mencionados . . .

...haced entonces navegar la nave con toda la velocidad que queráis, pues con tal que el movimiento sea uniforme y no fluctuante de un lado a otro, no reconoceréis el mínimo cambio en todos los efectos mencionados, ni por ninguno de ellos podréis daros cuenta si la nave se mueve o está quieta...

...las gotas caerán igual que antes en el recipiente inferior, sin que algunas caigan hacia el lado de popa por más que cuando la gota esté en el aire, el navío avance muchos palmos..."

Nota: Se llama cinemática a la descripción del movimiento en lenguaje matemático. La inclusión de análisis de fuerzas para estudiar el movimiento constituye la dinámica.

C) El reposo "absoluto" es indetectable por observación de estados de movimiento (Galileo) y mediante experimentos dinámicos (Newton). El reposo (relativo) es (cinemática y dinámicamente) indistinguible del movimiento rectilíneo y uniforme.

Partimos aquí otra vez de la invariancia de la 2ª ley de Newton bajo desplazamientos a velocidad constante (tomamos una dimensión por sencillez)

X coordenadas posición de un fenómeno visto por un observador en reposo. (R) x coordenadas posición del mismo fenómeno visto por otro observador en movimiento uniforme con velocidad constante v. (M)

Nota: el lector no experimentado en análisis matemático puede interpretar d como "variación".

$$dX \quad = \quad dx - v\,dt$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \qquad\qquad \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dv}{dt}$$

El último cociente es CERO porque la velocidad v es constante y así las aceleraciones son las mismas para observadores "inerciales", cumpliendo el enunciado C).

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - 0 \qquad\qquad \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Sin embargo hay un problema con el carácter del tiempo. Para estos dos observadores inerciales transcurre al mismo ritmo por hipótesis

$$dT = dt$$

(Intervalos de tiempo invariantes). Este no era el caso entre Perseo y Medusa

Las fórmulas anteriores se llaman **transformaciones Galileanas**

$$dT = dt$$
$$dX = dx - v\,dt$$

y representan otro tipo de relatividad, distinta de la de Einstein, en la que el tiempo es un invariante absoluto. Pero, como hemos visto con Perseo y Medusa, el carácter invariante de los intervalos de tiempo es incompatible con la invariancia de la velocidad de la luz. De cualquier forma la incompatibilidad es más profunda de lo que parece.

D) Aparentemente ¡el reposo es distinguible del movimiento rectilíneo y uniforme mediante experimentos electrodinámicos!. La cinemática de Galileo es incompatible con la electrodinámica de Maxwell.

Einstein comienza su famoso artículo de 1905 "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento" (Annalen der Physik, 17, p.891 , 1905) (traducido en [5]) con un ejemplo físico de la contradicción entre electrodinámica de Maxwell y cinemática de Galileo:

"Es conocido que la Electrodinámica de Maxwell, tal como se entiende en la actualidad, conduce, en su aplicación a cuerpos en movimiento, a asimetrías, a las cuales no parecen adherirse los fenómenos.

Piénsese en la interacción entre un imán y un conductor. El fenómeno observable depende aquí solo del movimiento relativo de imán y conductor, mientras que en el tratamiento habitual ambos casos, bien sea uno, bien sea otro de esos cuerpos el que se mueve, son estrictamente separables uno de otro.

Si se mueve presentemente el imán y está quieto el conductor, aparece en el entorno del imán un campo eléctrico con un cierto valor de energía, el cual, en los lugares donde se encuentran partes del conductor, genera una corriente.

Esté quieto, sin embargo, el imán, y muévase el conductor, no aparece en el entorno del imán ningún campo eléctrico, y por el contrario aparece en el conductor una fuerza electromotriz, que no corresponde a ninguna energía y que, empero, - igualdad del movimiento relativo supuesto en ambos casos considerados- produce unas corrientes de la misma magnitud y el mismo recorrido como en el primer caso las fuerzas eléctricas.”

Nota: el llamado por Einstein “tratamiento habitual” consiste en aplicar las transformaciones Galileanas del apartado anterior a las ecuaciones electrodinámicas, con lo que los casos mencionados se vuelven “separables”, es decir, distinguibles. La razón profunda consiste en que las ecuaciones de Maxwell NO son invariantes por las transformaciones Galileanas, lo cual lleva además a cometer el error de tomar el módulo del campo eléctrico como magnitud física “absoluta”.

E) (Einstein): el reposo “absoluto” es indetectable por observación de estados de movimiento y mediante experimentos electrodinámicos. El reposo (relativo) es indistinguible del movimiento rectilíneo y uniforme en la cinemática de Lorentz unificada con la electrodinámica de Maxwell.

El siguiente párrafo del mismo artículo de 1905, aparte de ser el “acta de nacimiento” del Principio de Relatividad, apunta ya cuál era la principal motivación teórica de Einstein: solucionar el “sinsentido” de una Física dividida en sus fundamentos:

“Ejemplos semejantes, como los intentos fallidos de constatar un movimiento de la Tierra respecto al “medio luminoso” conducen a la sospecha de que el concepto de reposo absoluto no corresponde a ninguna propiedad de los fenómenos, no sólo en la Mecánica, sino también en la Electrodinámica; por el contrario, más bien son válidas las mismas Leyes Electrodinámicas y Ópticas en los sistemas de coordenadas en los que son válidas las ecuaciones mecánicas...”

Einstein procede unificando Electromagnetismo y Mecánica al afirmar la extensión a todas las leyes físicas del principio de relatividad, e introduce la única modificación necesaria: el carácter invariante de la velocidad de la luz en lugar del carácter invariante del tiempo.

Se puede demostrar [9] que este carácter invariante de la velocidad de la luz equivale esencialmente a postular una velocidad límite invariante, insuperable para todo tipo de aceleraciones e interacciones causales

Aplicando el principio de relatividad a la conjunción del Teorema de Pitágoras en el espacio (3-métrica) con el carácter invariante de la velocidad y de los rayos (linealidad) en la propagación de la luz, Einstein halla rigurosamente:

a) Las nuevas transformaciones cinemáticas que reemplazan a las Galileanas. Son compatibles con la Electrodinámica. Se llaman transformaciones de Lorentz, quien ya las había descubierto previamente imponiendo invariancia en las ecuaciones de Maxwell. (Por sencillez se dan en 1+1 dimensiones)

$$dT = \gamma(v)\, dt - \gamma(v)\, (\beta/c)\, dx$$
$$dX = dx - \gamma(v)\, v\, dt$$

Reordenando y expresando matricialmente las transformaciones:

$$\begin{bmatrix} cdT \\ dX \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\pm\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{\pm\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cdt \\ dx \end{bmatrix} \qquad \beta = v / c$$

b) La 1+3-métrica, que sirve para calcular longitudes y ángulos de cuadri-vectores. Dicha 1+3-métrica no se aplica directamente sobre coordenadas, sino sobre cuadri-velocidades que forman un espacio vectorial en cada punto, llamado por los matemáticos Espacio Tangente. Las transformaciones de Lorentz dejan invariante esta 1+3-métrica (cono de rayos de luz ds = 0, así como su interior y exterior).

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - \left((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right)$$

Confusiones & Notaciones

1ª) La motivación del artículo: la relatividad especial de Einstein no invalida el Teorema de Pitágoras; la 1+3 métrica, en efecto, no es euclídea, pero se define sobre el espacio tangente al espacio-tiempo del siguiente modo, en principio

$$(ds)^2 = c^2(dT)^2 - \left((dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2\right)$$

Esta métrica semi-euclídea convive con un sinfín de 3-métricas euclídeas en las hojas espaciales. Cada observador escribe su propio Teorema de Pitágoras en su propia hoja espacial del espacio-tiempo plano de la relatividad especial.

2º) Los límites a bajas velocidades (comparadas con la luz) de las fórmulas relativistas cinemáticas de Einstein:

El límite a bajas velocidades (comparadas con la luz) de las transformaciones de Lorentz se calcula con $(v/c) = \beta \to 0$. Implica $\gamma \to 1$. Pero no debe desaparecer la 3-velocidad puesto que aún podría tomar todo un muestrario de valores pequeños, pero no nulos. Así $(v \neq 0)$ con $\beta \to 0$ implica tomar el límite $(1/c) = 0$, de acuerdo con Penrose [8].

$$dT = \gamma(v)\, dt - \gamma(v)\, (\beta/c)\, dx \to (\gamma = 1,\ (1/c) = 0) \text{ entonces } dT = dt$$
$$dX = dx - \gamma(v)\, v\, dt \to (\gamma = 1,\ v \neq 0) \text{ entonces } dX = dx - v\, dt$$

¡Se obtienen las transformaciones Galileanas, como debe ser!

En cambio, el límite a bajas velocidades $(1/c) = 0$ en la 1+3-métrica del intervalo $(ds)^2$ no está nada claro.

3º) Compatibilidad de cuadri-vectores y métricas con los límites a baja velocidad y con posibles extensiones hacia la Relatividad General

Una tradición matemática iniciada al parecer por Poincaré incorpora la constante c de la velocidad de la luz en las mismas coordenadas definiendo una supuesta coordenada espacial $x^0 = ct$ en lugar del tiempo t.

Esto supone reformular la métrica como matriz diagonal [1, −1, −1, −1] y soslaya el problema del límite de bajas velocidades en la 1+3-métrica.

Pero en realidad traspasa el problema a otra parte, pues conlleva definir por derivación cuadri-velocidades dependientes de la velocidad de la luz:

Cuadri-vector velocidad de Poincaré (homogéneo-dimensional)
V = (γ(v)c, γ(v)**v**) = γ(v) (c, **v**) que tiene dimensiones de 3-velocidad
y módulo constante = c en la métrica reformulada

El límite a bajas velocidades genera infinitos en este cuadri-vector velocidad siendo sin embargo indiferente para la nueva métrica [1, −1, −1, −1].

Habrá además muchos problemas al intentar pasar a la Relatividad General porque la invariancia de la velocidad de la luz está (por ahora) restringida a observadores "inerciales" en el formalismo matemático.

Una solución es considerar fundamental la 1+3-Métrica del Tiempo Propio, que es la considerada por Einstein para argumentos con relojes:

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - \frac{1}{c^2}\left((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right)$$

Esta métrica traduce una expresión directa de la relatividad del tiempo, tal y como la hemos encontrado en nuestro relato de Perseo y Medusa.

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)$$

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{\|\mathrm{v}\|^2}{\mathrm{c}^2}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2} \qquad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/\mathrm{c})^2}} = \gamma(\mathrm{v})$$

y además se llega a un reconfortante límite a baja velocidad (v finita, (1/c) = 0):
dτ = dt ¡Recuperamos el tiempo absoluto!
Por otro lado, si construimos un cuadri-vector velocidad universal como
u = (1, **v**) que no se ve afectado en el límite (1/c = 0), tendremos:
a) La 1+3-métrica del tiempo propio, en forma matricial [7] (¡matemáticas!):

$$g(\mathrm{u},\mathrm{u}) = \begin{bmatrix}1 & \mathrm{v}_x & \mathrm{v}_y & \mathrm{v}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & \\ & -\frac{1}{\mathrm{c}^2} & & \\ & & -\frac{1}{\mathrm{c}^2} & \\ & & & -\frac{1}{\mathrm{c}^2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{v}_x\\ \mathrm{v}_y\\ \mathrm{v}_z\end{bmatrix}$$

b) Una versión extendida inmediata de esta 1+3 métrica del tiempo propio a cristales y demás medios posiblemente anisótropos, donde la velocidad de la luz es distinta según la dirección (algo imposible en las otras versiones de la métrica):

$$g(u,u) = \begin{bmatrix} 1 & v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -\frac{1}{c_x^2} & & \\ & & -\frac{1}{c_y^2} & \\ & & & -\frac{1}{c_z^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Esta 1+3-métrica apunta ya directamente a la relatividad general, donde los coeficientes métricos son funciones a determinar por las ecuaciones de campo.

c) El módulo adimensional del cuadri-vector velocidad universal, definido de la forma usual en geometría analítica:

$$\|u\|^2 = g(u,u) = 1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}}\right)^2 = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$$

$$\|u\| = \sqrt{g(u,u)} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)$$

d) Una cuadri-velocidad universal normalizada unitaria definida de la misma forma que en geometría diferencial clásica de curvas:

$$U = \frac{u}{\sqrt{g(u,u)}} = \frac{(1, v)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma(v)(1, \quad v) = (\gamma(v), \quad \gamma(v)v)$$

Tendrá una interpretación física interesante, heredada de la Geometría Diferencial. La curva espacio-temporal cuya velocidad (en el sentido de la derivada) coincida en todo punto con esta cuadri-velocidad unitaria, será aquella cuyo parámetro “longitud de arco” sea precisamente el tiempo propio τ.

Es decir, si definimos la curva q(t) = (t, v t), entonces q´ = (1, v) = u

$$U = \frac{u}{\sqrt{g(u,u)}} = \frac{\frac{dq(t)}{dt}}{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}} = \gamma \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dq(\boldsymbol{\tau})}{d\boldsymbol{\tau}} \quad \text{(reparametrizada con } t = t(\tau)\text{)}$$

Si queremos contrastar notaciones, podemos dividir la cuadri-velocidad V de Poincaré entre su módulo constante c y comparar con el cuadri-vector universal unitario U:

$V / c = (\gamma(v)\, c, \gamma(v)\, \mathbf{v}) / c = (\gamma(v), \gamma(v)\, \mathbf{v}/c)$

(Poincaré) unitario con la métrica adimensional [1, -1,-1,-1]

$U = (\gamma(v), \gamma(v)\, \mathbf{v})$

(Universal) unitario con la métrica del tiempo propio $[1, -^1/c^2, -^1/c^2, -^1/c^2\ ]$

Lo curioso de la formulación de Poincaré es que resulta matemáticamente interesante para el cálculo por tener homogeneidad dimensional, pero da problemas en el límite físico de bajas velocidades.

Cuando (1/c) = 0 V /c → (1, **0**) reposo en cualquier caso. ¿Ptolomeico?

Cuando (1/c) = 0 U → (1, **v**) sigue siendo el movimiento rectilíneo uniforme con velocidad relativa **v** ¡Galileano!

Nota: en el límite el módulo de este cuadri-vector se reduce a la componente temporal (métrica del tiempo propio)

Ambas notaciones coinciden si usamos unidades c = 1, pero esto impide tomar el límite de bajas velocidades en sentido estricto.

Un análisis cuidadoso de los cuadri-vectores, en el estilo de Rindler [9] nos revela que son auténticas velocidades, derivando respecto al tiempo propio:

Cuadri-vector **velocidad** (homogéneo-dimensional) **de Poincaré**:

$$V = \frac{d}{d\tau}\left(x^0 \quad x \quad y \quad z\right) = \frac{dt}{d\tau}\left(\frac{d(ct)}{dt} \quad \frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt}\right)$$

$= (\gamma(v)c, \gamma(v)\mathbf{v}) = \gamma(v)\,(c, \mathbf{v})$ (módulo constante = c)

Cuadri-vector **unitario velocidad universal**

$$U = \frac{d}{d\tau}\left(t \quad x \quad y \quad z\right) = \frac{dt}{d\tau}\left(\frac{dt}{dt} \quad \frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt}\right)$$

$= (\gamma(v), \gamma(v)\mathbf{v}) = \gamma(v)\,(1, \mathbf{v})$ (módulo = 1)

Vemos ahora que el 1 en la componente temporal de la cuadri-velocidad u significa un avance uniforme hacia el futuro medido con la coordenada temporal aparente (t) a "velocidad temporal" 1 día / día o 1 minuto / minuto ...

4º) Masa relativista, E = mc², conservación de la masa-energía, cuadri-momento

Desarrollamos paralelamente expresiones para la masa relativista m y para la energía cinética K en función de la potencia y comparamos, siguiendo [10]

$m = \gamma\, m_0 \rightarrow m^2 = \gamma^2\, m_0^{\ 2} \rightarrow m^2 / \gamma^2 = m_0^{\ 2}$

$$m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 \qquad m^2\left(c^2 - v^2\right) = m_0^2 c^2$$

$m^2c^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2$

Derivando esta igualdad
$2mc^2dm = 2mv^2dm + 2m^2vdv$

Dividiendo todo entre 2m
$c^2dm = v^2dm + mvdv$

$dK = \mathbf{F} \circ \mathbf{v}\, dt$ Por otra parte

$\mathbf{F}\, dt = d\mathbf{p} = d(m\mathbf{v}) = \mathbf{v}\, dm + m\, d\mathbf{v}$
$dK = \mathbf{v} \circ \mathbf{F}\, dt = \mathbf{v} \circ d\mathbf{p}$

$dK = \mathbf{v} \circ \mathbf{v}\, dm + m\, \mathbf{v} \circ d\mathbf{v}$
$dK = v^2\, dm + m\, v\, dv$

Los segundos miembros son iguales, luego los primeros también

$$dK = c^2\, dm$$

Pero la velocidad de la luz es constante. Podemos integrar la energía cinética K:

$$K = c^2\, \Delta m = c^2\, (m - m_0)$$

Reordenando la fórmula:

$$m\, c^2 = m_0\, c^2 + K$$

Einstein llegó a la conclusión de que $m_0\, c^2$ y $m\, c^2$ representan, como siempre en relatividad especial, **un mismo tipo de energía** visto por dos observadores "inerciales" distintos, el primero en reposo respecto al fenómeno, y el segundo en movimiento uniforme con velocidad v.

Que la diferencia entre los dos valores energéticos, visto en reposo y visto en movimiento, sea precisamente la energía cinética K del movimiento uniforme con velocidad v, no hace sino confirmar la corrección de la teoría. Solamente queda identificar este nuevo tipo de energía. A primera vista, pensando en la masa en reposo, se refiere enteramente a la **inercia**.

Pero otro trabajo de Einstein [5], donde se pregunta si la inercia de un sistema se puede modificar por radiación, le lleva a la profunda intuición [3] de que la **energía total** E_0 del sistema, independientemente de su origen (universalidad) se liga con la **masa inercial** mediante la expresión **intrínseca**:

$$E_0 = m_0\, c^2$$

Suma de todas las formas de energía equivale intrínsecamente a masa inercial

Dicho de otro modo, cualquier tipo posible de variación energética ΔE modificará la masa inercial inicial de un sistema, independientemente del origen de dicha variación (térmico, químico, electrodinámico, etc...), de acuerdo con la fórmula (escrita en la referencia en reposo):

$$m_0^{\text{inicial}} + \frac{(\Delta E)_0}{c^2} = m_0^{\mathit{final}}$$

En el límite de bajas velocidades, (1/c = 0) que no parece importarle al sin duda eminente Poincaré en pro de una mayor elegancia (matemática, no física), Einstein recupera con rigor y exactitud el Principio de Conservación de la Masa.

$$m_0^{\text{inicial}} = m_0^{\mathit{final}}$$

En la mecánica Newtoniana, Conservación de la Masa y Conservación de la Energía total son principios teóricos independientes. Einstein afirma que, en la relatividad especial, resultan completamente unificados.

En la práctica, la conservación independiente de la masa es plausible a causa de las variaciones de energía pequeñas comparadas con el cuadrado de la velocidad de la luz, en las unidades usuales. Harían falta variaciones de energía enormes para evidenciar la famosa ecuación de Einstein. Pero la equivalencia masa inercial-energía total recibirá una confirmación innegable con la llegada de las reacciones nucleares.

Siguiendo con nuestra idea de comparar notaciones, podemos definir de dos formas el cuadri-vector momento lineal:

Cuadri-vector **momento lineal** (homogéneo-dimensional) de Poincaré:

$$P = m_0 V \text{ (módulo constante } = m_0 c)$$
$$= (m_0 \gamma(v) c, m_0 \gamma(v) \mathbf{v}) = (m c , m \mathbf{v})$$

De nuevo se generan infinitos en el límite de bajas velocidades (1/c =0)

Cuadri-vector **masa-momento universal**

$$P = m_0 U \text{ (módulo constante = masa en reposo } m_0)$$
$$= (m_0 \gamma(v) , m_0 \gamma(v) \mathbf{v}) = (m , m \mathbf{v})$$

Este último resulta especialmente adecuado para cálculos directos con los principios de conservación. Tiene además buen comportamiento en el límite de bajas velocidades ($\gamma = 1$), converge a la masa y momento newtonianos

$$= (m_0 \gamma(v) , m_0 \gamma(v) \mathbf{v}) \rightarrow (m_0 , m_0 \mathbf{v}) = (m_0 , \mathbf{p})$$

Nota: en el límite el módulo del cuadri-momento se reduce a la componente temporal (métrica del tiempo propio)

5º) Problemática de la dinámica relativista.

Antes de continuar, es necesario decir que, en la práctica, la masa inercial no es un concepto ligado a la velocidad, sino a la aceleración.

Se supone que hay que conservar la forma de la 2ª Ley de Newton. ¿respecto a qué coordenada temporal derivamos? Al construir los cuadri-vectores velocidad ya lo hemos visto: el tiempo propio a lo largo de la trayectoria

Primero, calculamos la derivada del factor $\gamma(v)$:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d((1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{-1}{2}})}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{-1}{2}(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{-3}{2}}(-\frac{2v}{c^2})\frac{dv}{dt} = \frac{v}{c^2}\gamma^3(v)a_T$$

Investiguemos la cinemática de la aceleración: lo que ocurre cuando derivamos el cuadri-vector unitario velocidad universal U:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{d(\gamma(1,v))}{dt}=\frac{d\gamma}{dt}(1,v)+\gamma(v)\frac{d(1,v)}{dt}=$$
$$=\frac{d\gamma}{dt}(1,0)+\frac{d\gamma}{dt}(0,v)+\gamma(v)(0,a)=$$
$$=\frac{d\gamma}{dt}(1,0)+\frac{d\gamma}{dt}v(0,u_T)+\gamma(v)(0,a_T)+\gamma(v)(0,a_N)$$
$$=\frac{d\gamma}{dt}(1,0)+\frac{v^2}{c^2}\gamma^3(v)(0,a_T)+\gamma(v)(0,a_T)+\gamma(v)(0,a_N)$$

Componentes: temporal + longitudinal/tangencial + transversal/normal

Ley de Newton generalizada

$$F=\frac{dP}{d\tau}=\frac{d(m_0U)}{d\tau}=m_0\frac{dU}{d\tau}=m_0\frac{dt}{d\tau}\frac{dU}{dt}=m_0\gamma(v)\frac{dU}{dt}$$

Por otra parte, el cuadri-vector fuerza generalizada lleva un factor $\gamma(v)$

$F=\gamma(v)$ $(\mathbf{f}\circ\mathbf{v}/c^2, \mathbf{f})$ la componente fuerza-temporal debe ser la derivada de la componente temporal del momento, o sea derivada de la energía dividida por c2

Así, debemos comprobar componente a componente:

$$F=\gamma(v)(\frac{f\circ v}{c^2},f)=m_0\gamma(v)\frac{dU}{dt}$$

Simplificando

$$(\frac{f\circ v}{c^2},f)=m_0\frac{dU}{dt}$$

$$(\frac{f\circ v}{c^2},0)+(0,f)=m_0\left(\frac{d\gamma}{dt}(1,0)\right)+m_0\frac{v^2}{c^2}\gamma^3(v)(0,a_T)+m_0\gamma(v)(0,a_T)+m_0(0,a_N)$$

$$(\frac{f\circ v}{c^2},0)+(0,f)=m_0\left(\frac{v}{c^2}\gamma^3(v)a_T(1,0)\right)+\frac{v^2}{c^2}\gamma^2(v)m(0,a_T)+m(0,a_T)+m(0,a_N)$$

$$(\frac{f\circ v}{c^2},0)+(0,f)=\left(\frac{v}{c^2}\gamma^2(v)ma_T(1,0)\right)+\frac{v^2}{c^2}\gamma^2(v)m(0,a_T)+m(0,a_T)+m(0,a_N)$$

Ecuaciones dinámicas por componentes:

Temporal | 3- Longitudinal | 3 -Normal

$$f \circ v = ma_T \gamma^2(v)v \qquad f_T = \frac{v^2}{c^2}\gamma^2(v)ma_T + ma_T \qquad f_N = ma_N$$

Por sustitución

$$f_T = \frac{v}{c^2}(f \circ v) + ma_T \qquad f_N = ma_N$$

Reordenando, la parte tridimensional admite una forma cuasi-clásica:

$$f_T = \frac{v}{c^2}(f \circ v) + ma_T \qquad f_N = ma_N$$

Reunificando parte longitudinal y parte transversal en una sola 3-fuerza y una sola 3-aceleración

$$f_T = \frac{v}{c^2}(f \circ v) + ma_T$$

o, también

$$\left(f - \frac{v}{c^2}(f \circ v)\right)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 a$$

Todas estas expresiones se reducen a las clásicas en el límite de bajas velocidades ¡COMPROBAR!

Epílogo: Entre las cimas olimpiónikas...

...se abre un claro en el Bosque Sagrado junto a los Lagos Eternos;
muchos acuden y se van sentando en amplio círculo sobre la hierba mullida.
En una peña está sentado Orfeo afinando la Lira;
Einstein, al pie de la peña, busca con la mirada entre los últimos que van llegando.

EINSTEIN: “Aprisa, buen Pitágoras, en tu ausencia he tenido que delimitar yo el Círculo perfecto, único lugar mágico donde las Musas, entrelazándose ya con frescas guirnaldas de flores inmortales, se disponen a danzar en el Ocaso.

Desde aquí veo el Carro de Helios descendiendo tras las cimas. ¡Rápido! La trémula niebla entre los árboles, corona de misterio que envuelve al Bosque, ya ha inundado el Círculo y se mece, apacible como las calmas aguas del Egeo, para besar los pies de las Musas mientras danzan etéreas.

En cuanto Apolo abandone su Carro y atraviese el Bosque con su habitual presteza, sus rayos de Oro encenderán la niebla, quedando iluminado y consagrado todo cuanto roce. En ese instante Orfeo comenzará su Música inolvidable, y el resto de los sonidos tendrán que dormir en el Reino del Silencio, hasta que despierten todas las Estrellas”.

PITÁGORAS: “No puedo apresurarme más, amigo Einstein. No vengo solo”.

EINSTEIN: “¿Quién es la triste y desolada mujer que te acompaña? Viene llorando. Dime, ¿qué profunda desgracia ha sucedido?”

PITÁGORAS: “Baja la voz, ha comenzado la Música. Apartémonos hacia el Bosque para que pueda contarte... Venimos de los festejos que Zeus ha ofrecido en honor de un sobrino lejano de la rama familiar del Norte, invitado a pasar unos días no se sabe bien por quién.

Es un joven muy alto y delgado, de rostro afilado, aunque su lengua lo es mucho más. Se llama Loki, nombre que parece tener que ver con el fuego y con el hielo a la vez, algo así como una unión de contrarios del amigo Heráclito. En el trato es extremadamente ingenioso y muy divertido. Se ha ganado el favor de todos, a excepción de la Sapiente Atenea, que no puede soportar sus continuas bromas maliciosas y no cesa de advertir que este primo del Norte trama algo.

Pues bien, el tal Loki cuenta que ha inventado el arma última y definitiva para acabar con la *hybris* de los mortales, pero sin derramamiento de sangre. Ares está pendiente de todo lo que dice, y ha convencido a Zeus para acceder a una extraña propuesta: si el arma suprema efectivamente funciona, Loki no tendrá que volver al lejano Norte, donde al parecer no está muy bien visto, sino que Zeus lo acogerá para siempre en el Sur, nombrándolo Consejero del Olimpo”.

EINSTEIN: “Yo he sido pacifista todo mi tiempo propio, a excepción de una ocasión gravísima. ¿Qué nueva arma, definitiva pero desatinada, será ésta?”

PITÁGORAS: “Me avergüenza confesar que no he entendido bien su estructura y funcionamiento, aunque me lo han explicado varias veces. Tiene que ver con la enseñanza de infantes y adolescentes. Las instrucciones del arma de Loki están llenas de extraños términos como: “promoción automática en Primaria”, “progresa adecuadamente”, “necesita mejorar”, “alcanzar las competencias básicas (pero olvidando adecuadamente las dos últimas)”, etc.

Con estos componentes, Loki garantiza la transmutación de tiernos infantes en contestones pagados de sí mismos y totalmente dispuestos a desafiar a sus propios padres y a sus profesores, aunque a la larga se estén fraguando la ruina. Ya no harán falta más conflictos, porque habrá uno en miniatura dentro de cada casa donde un infante compruebe que pasa de curso haga lo que haga”.

EINSTEIN: “Vale, pero los progenitores y enseñantes se pondrán en contra, ¿no? Y ellos son los que mandan. Por lo menos en mi época mandaban, quizá demasiado”.

PITÁGORAS: “No, por lo visto eso es lo mejor del arma. La magia de Loki le arrebatará a progenitores y profesorado los poderes necesarios, mediante el traidor recurso de culpabilizarlos por provocar los males que intentan arreglar.

La clave está en un encantamiento de Loki llamado “pedagógico” (incluido en el arma) que obliga a considerar Pura, Santa, Indiscutible e Inamovible la normativa que ha de “regular” la desdichada situación, con el argumento de que dicha normativa está pensada exclusivamente para beneficiar al alumnado con dificultades intelectivas.

Cualquier posible caso de empecinamiento en la vagancia debido a la voluntad del infante y a la normativa que indirectamente lo azuza, será disculpado y asimilado como error en la convivencia o error pedagógico. Así la culpa, la gran culpa, toda la culpa, será *in aeternum* de los progenitores y del profesorado, que no se han esforzado lo suficiente para superar pedagógicamente los problemas”.

EINSTEIN: "No puede ser, noble Pitágoras. Al final, profesores angustiados, progenitores indignados y el sentir común del pueblo elevarían la protesta más firme y grandiosa en todos los foros, so pena de que la enseñanza y los mismos países queden dañados para siempre. Algún gobernante sagaz se dará cuenta a tiempo de las consecuencias y se opondrá".

PITÁGORAS: "Me temo que te engañas, amigo Einstein. El arma incluye también resortes propios para su auto-defensa, prácticamente infalibles. Contiene en su estructura dos programas complementarios, el *diagnóstico* y la *calidad*. Entre el martillo y el yunque se encargarán de todo lo que se interponga.

El programa de diagnóstico funciona a dos niveles, el análisis socio-económico de las familias, que servirá para afirmar que la orientación y ayuda al estudiante en su propia casa no es adecuada ni suficiente, y el análisis paralelo de "nivel de competencias" del estudiante, que indicará que las notas de los profesores no cuadran con el infalible diagnóstico, lo cual prueba que hacen mal su trabajo.

El programa de calidad y mejora insistirá en que el esfuerzo debe aumentar desmesuradamente, pero correspondiendo en el fondo casi toda la carga a los responsables mayores de edad, padres y enseñantes, no al estudiante, menor de edad.

Además, ambos programas se protegen con otra magia llamada simetría quiral. Como sabes, se llama quiralidad a la propiedad de los estados físicos de portar una "mano" o giro hacia la izquierda o hacia la derecha.

Pues bien, la simetría quiral, que procede de instancias superiores a los estados, consiste en funcionar del mismo modo independientemente de la "mano". Da igual mano izquierda o mano derecha, en los asuntos con simetría quiral todos pensarán y harán lo mismo: *todo para el profesorado, pero sin el profesorado...*

Mi triste compañera es la mismísima Pandora, que se ha derrumbado al comprender que no hay nada que hacer y que los inocentes están indefensos.

Entre lágrimas, Pandora ha dimitido de su cargo como propagadora de los males terrenales porque este tipo de arma no deja lugar a la esperanza, que ella guardaba celosamente para consolar a los mortales merecedores y necesitados. Está muy compungida y no se encuentra nada bien".

EINSTEIN: "Ciertamente, causa lástima su aflicción. Pero seguro que hay mentes tan ingeniosas como la de Loki o más en este noble Círculo. Yo no me tengo por inútil y pensaré algo. A lo mejor el arma de Loki lleva dentro la semilla de su propia destrucción... y alguien, el hobbit menos pensado, la encuentra .... ja, ja.

Anímate y mira a tu alrededor, querida Pandora; ha acudido hoy uno de los cantores más altos y poderosos, que en el río del tiempo nació en país vecino y hermano del mío. Su rumbo temporal transcurrió con gran desarraigo, sin hallar jamás asiento ni acogida definitivos. Por eso le llamamos el *Poeta Errante.*

Sin embargo, de su misma soledad y su nostalgia por un hogar perdido obtuvo fuerza para rescatar un tesoro de nobles valores y sentimientos curativos, que engarzó como gemas en la orfebrería del lenguaje. Seguro que sabrá brindarte consuelo en esa aflicción propicia a la sabiduría, como tú pretendías hacer con los mortales.

Curiosamente el *Errante,* al igual que yo, comprendió el verdadero sentido de la gravedad, que quiero revelar próximamente a nuestro buen amigo Pitágoras".

PITÁGORAS: "¿A qué cuento importa ahora la gravedad?. Shhhhh, Apolo en persona nos está observando. Huy, se dirige hacia nosotros. Espero no haberle irritado, pero Pandora requería algún consuelo ..."

La Música se aquieta suavemente. Apolo se acerca, envuelto en Luz;
ciñe dulcemente a Pandora por hombros y cintura,
llevándola entre las Musas, que la abrazan y la enlazan con sus guirnaldas;
Orfeo eleva y pulsa la Lira en ofrenda de nueva Canción,
y el Errante Poeta de antaño
deja oír su voz una vez más:

"Oh, vosotros los Tiernos, entrad alguna vez
en el Aliento distante que os ignora,
dejadle compartir vuestras Mejillas, dividido;
que tiemble tras vosotros, unido una vez más.

Oh vosotros Bienaventurados, vosotros los Íntegros,
que parecéis Principio de todo Corazón,
Arco de Dardos y Meta de Flechas,
más Eterno os brilla el Sonreír entre lágrimas.

No os arredre el Sufrir; soltad todo Pesar,
tornad lastre a la Terrena Gravedad..."

Como si estas palabras fuesen una señal,
todos se unen a la Danza inmortal de las Musas.
El rostro de Pandora se ilumina por fin con una sonrisa.
Música, Poesía y Danzas se suceden con gran Alegría
mientras una a una, en el Firmamento,
van despertando todas las Estrellas...

BIBLIOGRAFÍA (I)

[1] Alonso, M y Finn, E. J. Física. Volumen I: Mecánica. Fondo Educativo Interamericano
[2] Tipler, F. Física. Tomo I. Editorial Reverté.
[3] Einstein, A. Sobre la teoría de la relatividad especial y general. Alianza Editorial.
[4] Einstein, A. El significado de la Relatividad. Planeta-Agostini
[5] Einstein, A. Los artículos clave de 1905 y 1906 en "Cien años de relatividad". Editorial Nivola
[6] Arnold, V. Mecánica clásica. Métodos matemáticos. Editorial Paraninfo.
[7] Bolos, Cayetano, Requejo. Álgebra lineal y geometría. Servicio de publicaciones. Universidad de Extremadura.
[8] Penrose, R. Lo grande, lo pequeño y la mente humana. Cambridge University Press
[9] Rindler, W. Essential Relativity. Springer
[10] Irodov, I.E. Leyes fundamentales de mecánica. Editorial MIR.